

## Os elementos de Euclides

David Berlinski

# Os elementos de Euclides

Uma história da geometria e do poder das ideias

Tradução:

Claudio Carina

Revisão técnica:

Marco Moriconi

*professor do Instituto de Física/UFF*



## *Para Morris Salkoff*

Título original:

*The King of Infinite Space*

*(Euclid and his Elements)*

Tradução autorizada da primeira edição americana,  
publicada em 2013 por Basic Books, um selo da Perseus Books Group,  
de Nova York, Estados Unidos

Copyright © 2013, David Berlinski

Copyright da edição brasileira © 2018:

Jorge Zahar Editor Ltda.

rua Marquês de S. Vicente 99 – 1<sup>ª</sup> | 22451-041 Rio de Janeiro, RJ

tel (21) 2529-4750 | fax (21) 2529-4787

editora@zahar.com.br | www.zahar.com.br

Todos os direitos reservados.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo  
ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Grafia atualizada respeitando o novo  
Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Preparação: Isadora Torres | Revisão: Nina Lua, Eduardo Monteiro

Indexação: Gabriella Russano | Capa: Estúdio Insólito

Foto da capa: © Bettmann/Getty Images

CIP-Brasil. Catalogação na fonte

Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

---

Berlinski, David

B441e Os elementos de Euclides/David Berlinski; tradução Claudio Carina;  
revisão técnica Marco Moriconi – 1.ed. – Rio de Janeiro: Zahar, 2018.

Tradução de: *The king of infinite space: Euclid and his elements*

Apêndice

Inclui índice

ISBN 978-85-378-1738-4

1. Geometria. 2. Geometria euclidiana. 3. Geometria – História. I. Ca-  
rina, Claudio. II. Título.

CDD: 516.2

CDU: 514.12

17-45988

On peut avoir trois principaux objets dans l'étude de la vérité: l'un, de la découvrir quand on la cherche; l'autre, de la démontrer quand on la possède; le dernier, de la discerner d'avec le faux quand on l'examine.\*

BLAISE PASCAL, *De l'Esprit géométrique*

---

\* Podemos ter três principais objetos no estudo da verdade: um, de descobri-la quando a buscamos; outro, de demonstrá-la quando a possuímos; o último, de discerni-la com os fatos quando a examinamos. (N.T.)

## Prefácio

EUCLIDES É RECONHECIDO universalmente. Seu nome não corre o risco de ser esquecido. Ele se encontra na companhia de homens cuja reputação está além de quaisquer revisões. Isso já estabelece o seu lugar, mas dificilmente explica por que ele continua a ocupar tal posto tantos anos depois de sua morte.

Euclides é, naturalmente, o autor de *Os elementos*, e *Os elementos* é de longe o mais bem-sucedido dos livros didáticos de matemática. Um livro-texto que sobreviveu por mais de 2 mil anos representa uma realização incomum. A maioria tem uma vida curta e ignominiosa. Eles servem a um propósito, mas não inspiram reverência.

*Os elementos* de Euclides é diferente.

Ninguém jamais encontrou uma maneira melhor de apresentar os elementos da geometria plana; nenhum professor razoável poderia pensar em um substituto. Não existe nenhum.

*Os elementos* não é apenas um grande livro de matemática: é um grande livro. O leitor contemporâneo, ávido por revelações pessoais de Euclides, vai desistir de *Os elementos*, insatisfeito.

Não há uma palavra sobre elas. Mas, ao escrever *Os elementos*, Euclides encontrou uma maneira de impor sua personalidade poderosa sobre proposições dispersas de geometria e, impondo-se a elas, criou uma imensa estrutura, um espaço lógico, um mundo em que existe crescimento, forma e depen-

dências íntimas entre as partes, algo muito grande mas não avassalador: *Os elementos* em si é o transbordamento de uma mente singular e determinada, impressa em papel ou papiro.

Sem ter revelado nada de interesse, Euclides, é claro, revelou tudo o que é importante.

Se isso não é uma realização artística, nada mais o é.

*Paris, 2012*

## 1. Sinais de homens

*L'Homme c'est rien; l'oeuvre c'est tout.*

(O homem não é nada; sua obra, tudo.)

GUSTAVE FLAUBERT

O ARQUITETO ROMANO Marcus Vitruvius Pollio viveu e trabalhou no século I a.C. Seu tratado *Libri Decem*, ou *Os dez livros*, foi dedicado a César Augusto cerca de vinte anos antes do nascimento de Cristo. Vitruvius foi arquiteto e engenheiro militar, e *Os dez livros* contém um relato notável de ideias arquitetônicas clássicas e métodos de construção. É sofisticado. Um edifício, ele insiste, deve ser durável, útil e bonito (*firmitas, utilitas, venustas*). São normas simples, mas rigorosas. Poucos edifícios construídos nos últimos sessenta anos poderiam estar de acordo com elas. Vitruvius escreve como crítico e comentarista, como alguém preparado para julgar tanto homens quanto edifícios, e quando o faz tem orgulho em ver as coisas como elas são.

Em seu sexto livro, *De Architectura*, Vitruvius reconta uma história, também contada por Cícero, sobre Aristipo, um filósofo do século IV. Depois de se encontrar “nafragado e lançado na costa de Rodes”, ele se desesperou.

Então, Aristipo começou a notar algumas figuras geométricas riscadas na areia – triângulos, talvez, ou círculos, ou linhas retas suspensas entre pontos, os detritos descuidados de alguém agachado à beira-mar e pensando em formas no espaço.

Ele disse aos seus companheiros: “Podemos esperar pelo melhor, pois vejo sinais de homens.”

Aristipo era bastante conhecido por sua devoção ao prazer; era notório por isso. Quando era repreendido por dormir com prostitutas, respondia que uma mansão não se torna inútil por já ter sido habitada. Esperamos que homens assim sejam testados; ficamos desapontados se não o forem. É certo que Aristipo encontrou redenção na solidariedade humana – *os sinais de homens*.

A MATEMÁTICA É O QUE OS MATEMÁTICOS FAZEM DELA. Que outro padrão se aplicaria? Ainda assim, os matemáticos costumam mostrar um apropriado bom senso do que devem fazer daquilo que fizeram. Eles são, em suma, guardiões dos limites de suas próprias fronteiras. A lógica matemática é uma parte da matemática? Ou da física matemática? A maioria dos matemáticos diria que não. Eles nunca duvidaram da importância dessas disciplinas. Não são cegos. Mas matemáticos são exigentes como os gatos. E quase tão conservadores. Seu compromisso maior é com as formas e os números, o olho que vê, o coração que bate.

Contar deveria vir em primeiro lugar, não? Todas as criaturas vivas fazem distinção entre a coisa que é e a coisa que *não* é. Dois números são necessários para expressar todos os imperativos da biologia.

*Este sou eu, aquele não é.*

Então, vida longa aos números.

Mas também existe a visão. As formas são tão convincentes metafisicamente quanto os números. Um único ponto, afinal



de contas, divide o Universo entre o que está *no* ponto e o que *não* está.

Vida longa às formas também.

As formas e os números estão coordenados em certo sentido. Pontos muitas vezes têm um endereço numérico. A latitude e a longitude de Adelaide são  $34^{\circ} 55'S$  e  $138^{\circ} 36'E$ . Mesmo as letras S e E podem ser substituídas pelos números 19 e 5, suas posições no alfabeto. O resultado é um número que marca Adelaide como 345519138365. Da mesma maneira, números costumam ter uma localização. O número 345519138365 é notável por indicar o ponto onde se encontra *Adelaide*.

Vida longa às formas e aos números.

ALGUMAS CULTURAS SÃO geométricas em sua sensibilidade, outras não.

Ciosos da ordem, os romanos do Império apreciavam a severidade. Eles não brincavam com isso.

Uma ortodoxia visual poderosa dominava sua paisagem: anfiteatros, monumentos públicos e praças, cidades divididas em blocos, vilas senatoriais dispostas num retângulo em torno de um espaço interior, uma grande civilização urbana se espalhando pelo sul da Europa e pela bacia do Mediterrâneo.

Estranho, vindo de um povo cujos elegantes numerais (I, II, XXXII) os tornaram incapazes de conduzir seus assuntos práticos.

Nossa cultura é muito diferente. O historiador Tony Judt argumenta que, no século XIX, a estrada de ferro, ao encolher distâncias, provocou uma reorganização do tempo.<sup>1</sup> Um novo padrão de precisão foi primeiramente concebido e em seguida

aplicado. Aproximações que por muito tempo serviram para nortear o curso da vida do ser humano – o nascer do sol, o pôr do sol, meio-dia, meia-noite – foram substituídas por um complicado aparato numérico, com o tempo dividido em partes e partes de partes.

O resultado foi uma cultura que, em comparação com o mundo antigo, é numericamente sofisticada, mas visualmente desagradável.

*Nós contamos, eles viam.*

Isso faz diferença – é óbvio que faz.

EUCLIDES DE ALEXANDRIA NASCEU no século IV a.C. e morreu no século III a.C. O ano 300 a.C. é muitas vezes designado como a época em que ele se desenvolveu – Euclides de Alexandria, *fl.*300, como os historiadores às vezes escrevem. Quaisquer que sejam as incertezas quanto ao seu nascimento e sua morte, ele estava então no auge de seus poderes – alerta, vibrante e no comando. Quando jovem, Euclides deve ter sido influenciado por estudantes de Platão, e pode perfeitamente ter frequentado a academia fundada pelo filósofo, misturando-se a outros filósofos e inserindo-se gregariamente em seu grupo de fofocas. Platão dedicava-se à geometria, tendo chegado até mesmo a atribuir a várias divindades o apreço por seu estudo.

Assim como os detalhes de sua vida pessoal, as circunstâncias em que Euclides compôs sua obra-prima, *Os elementos*, permanecem em grande parte desconhecidas. Há algumas evidências de que Euclides tenha lecionado na grande biblioteca de Alexandria, fundada por Ptolomeu I. O Euclides de *Os elementos* é severo, lógico, implacável, um homem capaz

de concentrar os poderes de sua mente no que é abstrato e remoto. Seria fascinante conhecer detalhes de sua vida em Alexandria, poder *ver* Euclides saindo cambaleante das termas ou com uma sensação de ter deixado as coisas saírem de seu controle, submetendo-se a ter as sobranceiras aparadas. Há sugestões, aqui e ali, que, como professor, Euclides foi urbano, prestativo e delicado. Entre suas outras virtudes, *Os elementos* é um grande livro; talvez Euclides tenha lido seu brilhante trabalho em voz alta, com o ar quente e ensolarado passando pelas partículas de poeira, sem saber que seus alunos ouviam em primeira mão uma lição que tantos outros viriam a ouvir tantas vezes e de tantas outras vozes.

Como matemático, Euclides apreendeu com seus predecessores, homens como Eudoxo e Teeteto, e passou aos seus sucessores, Apolônio e Arquimedes. Euclides resumiu; ele ajustou e refinou; foi uma força vital sintética e, rapidamente, se tornou um monumento – tudo isso nós sabemos a partir do que podemos imaginar e de comentários posteriores, mas o homem em si permanece invisível, com sua influência transmitida por sua atividade, um espião remoto na história do pensamento, um grande desbravador de túneis.

Euclides deve ter sido um homem encorpado, e em algum momento em seus contatos com aqueles filósofos tagarelando sem parar, juntou suas vestes e, com uma consciência arguta de seus poderes, decidiu que tinha algo a oferecer que eles não haviam visto e não poderiam expressar.

DURANTE MAIS DE 2 MIL ANOS, geometria significou geometria euclidiana, e a geometria euclidiana era *Os elementos*. É o mais

antigo texto completo da matemática ocidental tradicional e o mais influente de seus livros-texto.

O primeiro livro de *Os elementos* contém 48 proposições, e o segundo, quatorze. Existem ao todo treze livros compreendendo 467 proposições, e mais dois livros de autoria incerta, atribuídos a edições mais antigas de *Os elementos*.

As proposições nos Livros I a IV dizem respeito a pontos, linhas retas, círculos, quadrados, triângulos, ângulos retos e retângulos, as formas estáveis de arte e da arquitetura. Os Livros V a IX desenvolvem uma teoria de magnitudes, proporções e números. Os demais livros são dedicados à geometria sólida. Cada livro de *Os elementos* é convincente, mas o mito e a memória de Euclides estão nos primeiros quatro livros de seu tratado.

Em cada geração, alguns estudantes encantaram-se com *Os elementos*. “Aos onze anos de idade”, lembra Bertrand Russell em sua autobiografia, “eu comecei a ler Euclides, tendo meu irmão como tutor. Foi um dos grandes acontecimentos da minha vida, tão deslumbrante como o primeiro amor. Eu nunca tinha imaginado que havia algo tão delicioso no mundo.”

O curso de geometria euclidiana há muito faz parte do currículo universal da humanidade. Mesmo os que não foram conquistados por seu estudo reconhecem muitas vezes que a disciplina euclidiana lhes fez bem. Melhorou sua higiene mental. Os estudantes aprendem álgebra mais ou menos no mesmo período em que estudam geometria, e, o que é bastante curioso, raramente percebem a melhoria que ela confere.

Álgebra, os alunos se queixam, é simplesmente desagradável.

NADA SOBRE EUCLIDES sobreviveu até o século XXI. Conhecemos Euclides apenas a partir de cópias de cópias, passando pela mutilação de traduções do grego para o latim e depois para o árabe, voltando para o grego e finalmente para o latim medieval. As versões modernas de Euclides são baseadas em um manuscrito grego do século X, identificado no século XVIII pelo estudioso francês François Peyrard. Há uma distinção entre a solidez pungente do pensamento de Euclides e os papiros perecíveis que ele usou para expressá-los. Muito antes de Euclides, os babilônios escreviam laboriosamente em tabuletas. O barro molhado sobre uma mesa comprida fazia *ploft*. As inscrições feitas por um estilete soavam *chif, chif, chif*. O forno era ao sol. E, conseqüentemente, a imortalidade. Nós podemos ver suas palavras, bem como suas obras. Mas não podemos ver o próprio Euclides de maneira alguma.

Se Euclides impôs ordem sobre seu objeto de estudo e o transformou em um sistema, foi uma ordem tão severa que moldou a geometria numa forma fixa até pelo menos a Renascença Italiana, no século XVI. Desde então, seguiu-se um processo longo e confuso em que o monumento euclidiano foi gradualmente descascado até que, no século XIX, os matemáticos descobriram geometrias *não* euclidianas, com a geometria euclidiana tornando-se uma entre muitas, e os matemáticos quase enlouqueciam com possibilidades que os absorviam, com espaços que inchavam como bolas de basquete, curvados como selas de cavalo, ou que seguiam eternamente sem chegar a lugar algum.

*Os elementos* representa a grande conquista da tradição matemática grega. Arquimedes foi um matemático mais brilhante do que Euclides. Ele deu ao mundo aquilo que grandes mate-

máticos sempre dão, que é um registro de seu gênio, mas em termos de um sistema axiomático, Euclides deu à matemática algo ainda mais duradouro, e que era um estilo de vida. Era um estilo de vida invisível para as pessoas que antecederam os gregos, e invisível também para os chineses, os mestres de uma cultura tecnológica sutil.

E, como era de esperar, continua invisível para todos os outros – até hoje – e por isso deve ser ensinado como qualquer outro artefato da civilização.