

Ian Stewart

O fantástico mundo dos números

A matemática do zero ao infinito

Tradução:
George Schlesinger

Revisão técnica:
Samuel Jurkiewicz
Professor da Politécnica e da Coppe/UFRJ

Título original:

Professor Stewart's Incredible Numbers

Tradução autorizada da primeira edição inglesa,
publicada em 2015 por Profile Books,
de Londres, Inglaterra

Copyright © 2015, Joat Enterprises

Copyright da edição em língua portuguesa, exceto Portugal © 2016:
Jorge Zahar Editor Ltda.

rua Marquês de S. Vicente 99 – 1ª | 22451-041 Rio de Janeiro, RJ
tel (21) 2529-4750 | fax (21) 2529-4787
editora@zahar.com.br | www.zahar.com.br

Todos os direitos reservados.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo
ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Grafia atualizada respeitando o novo
Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Revisão: Tamara Sender, Eduardo Monteiro
Capa: Sérgio Campante

CIP-Brasil. Catalogação na publicação
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

Stewart, Ian
S871f O fantástico mundo dos números: a matemática do zero ao infinito / Ian Stewart;
tradução George Schlesinger. – 1.ed. – Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

il.

Tradução de: Professor Stewart's incredible numbers

ISBN 978-85-378-1552-6

1. Matemática. I. Título.

Prefácio

SEMPRE FUI FASCINADO por números. Minha mãe me ensinou a ler e a contar muito antes que eu começasse a ir à escola. Aparentemente, quando comecei, voltei no fim do primeiro dia de aula reclamando que “nós não aprendemos nada!”. Desconfio que meus pais vinham me preparando para esse dia difícil dizendo-me que eu aprenderia todo tipo de coisas interessantes, e levei a propaganda um pouquinho a sério demais. Mas logo estava aprendendo sobre planetas e dinossauros e como fazer um animal de gesso. E mais sobre números.

Ainda sou encantado por números, e ainda aprendo cada vez mais sobre eles. Agora, sempre me apresso em ressaltar que a matemática trata de muitas ideias diferentes, não só de números. Por exemplo, também trata de formas, padrões e probabilidades – mas os números escoram toda a matéria. E todo número é um indivíduo único. Alguns números especiais se destacam acima do resto e parecem desempenhar um papel central em muitas áreas diferentes da matemática. O mais familiar deles é π (π), que encontramos primeiro em conexão com círculos, mas que tem uma notável tendência de aparecer subitamente em problemas que não parecem envolver círculos de modo algum.

A maioria dos números não pode aspirar a tais píncaros de importância, mas geralmente você pode encontrar alguma presença incomum até mesmo do número mais humilde. No *Guia do mochileiro das galáxias*, o número 42 era “a resposta para a grande questão da vida, do Universo e de tudo”. Douglas Adams disse que escolheu tal número porque uma rápida pesquisa entre seus amigos sugeriu que era um número totalmente chato. Na verdade, não é, como será demonstrado no capítulo final.

O livro está organizado em termos dos próprios números, embora nem sempre em ordem numérica. Tal como os capítulos 1, 2, 3, e assim por diante, há também um capítulo 0, um capítulo 42, um capítulo -1 , um capítulo $\frac{22}{7}$, um capítulo π , um capítulo 43 252 003 274 489 856 000 e um capítulo $\sqrt{2}$. É claro que uma porção de potenciais capítulos nunca chegaram a participar da numeração. Cada capítulo começa com um breve resumo dos principais tópicos a serem incluídos. Não se preocupe se esse resumo ocasionalmente parecer críptico, ou se houver afirmações rasas sem sustentação de nenhuma evidência: tudo será revelado à medida que você for lendo.

A estrutura é simples e direta: cada capítulo enfoca um número interessante e explica *por que* ele é interessante. Por exemplo, 2 é interessante porque a distinção par/ímpar aparece em toda a matemática e na ciência; 43 252 003 274 489 856 000 é interessante porque é o número de maneiras possíveis de rearranjar um cubo de Rubik.

Como 42 está incluído, deve ser um número interessante. Bem, de qualquer maneira, *um pouquinho interessante*.

A esta altura devo mencionar a canção de Arlo Guthrie “Alice’s Restaurant Massacre” (O massacre no restaurante de Alice), uma história musical longuíssima e cabeluda que relata em minuciosos e repetitivos detalhes fatos que envolvem jogar fora o lixo. Dez minutos depois do início da música,* Guthrie para e diz: “Mas não foi isso que eu vim aqui contar.” Acabamos descobrindo que na verdade foi isso, sim, que ele veio contar, mas que esse lixo é só a parte de uma história maior. Hora do meu comentário tipo Arlo Guthrie: este *não é* realmente um livro sobre números.

Os números são apenas a porta de entrada, uma rota pela qual podemos mergulhar na impressionante matemática associada a eles. *Todo número é especial*. Quando você chega a apreciá-los como indivíduos, eles são como velhos amigos. Cada um tem uma história para contar. Muitas vezes essa história conduz a montes de outros números, mas o que realmente importa é a matemática que os une. Os números são personagens

* A gravação original tem mais de dezoito minutos. (N.T.)

num drama, e a coisa mais importante é o drama em si. Mas você não pode ter um drama sem personagens.

Para evitar que o livro ficasse desorganizado demais, eu o dividi em seções segundo o tipo de número: números inteiros pequenos, frações, números reais, números complexos, infinitos... Com algumas inevitáveis exceções, o material é desenvolvido em ordem lógica, então os primeiros capítulos assentam a base para os posteriores, mesmo que o tópico mude completamente. Esta exigência influencia a maneira como os números são arranjados, e requer algumas concessões. A mais significativa envolve números complexos. Eles aparecem bastante cedo, porque eu preciso deles para discutir algumas características de números mais familiares. De modo similar, um tópico avançado ocasionalmente aparece de repente em algum lugar porque esse é o único lugar sensato para mencioná-lo. Se você deparar com uma dessas passagens e achar difícil seguir adiante, pule e vá em frente. Você pode voltar a ela mais tarde.

Os números são verdadeiramente incríveis – não no sentido de que você não pode acreditar em nada que ouve sobre eles, mas no sentido positivo: eles decididamente são incríveis! E você experimenta essa sensação sem ter que fazer nenhuma soma. Você pode ver como os números evoluíram historicamente, apreciar a beleza de seus padrões, descobrir como são usados, maravilhar-se com as surpresas: “Eu nunca soube que 56 era tão fascinante!” Mas é. Realmente é.

E assim são todos os outros. Inclusive o 42.

Números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... O que poderia ser mais simples que isso? Contudo, são os números, talvez mais que qualquer outra coisa, que possibilitaram à humanidade arrastar-se para fora da lama e visar às estrelas.

Números individuais têm seus próprios traços característicos e conduzem a uma variedade de áreas da matemática. Antes de examiná-los um por um, porém, vale a pena dar uma rápida olhada em três grandes questões. Como os números se originaram? Como o conceito de número se desenvolveu? E o que *são* números?

A origem dos números

Cerca de 35 mil atrás, no Paleolítico Superior, um ser humano entalhou 29 marcas na fíbula (osso da panturrilha) de um babuíno. Isso foi encontrado numa caverna nos montes Lebombo, na Suazilândia, e ficou conhecido como osso de Lebombo. Acredita-se que seja um bastão de contagem: algo que registra números como uma série de entalhes: |, ||, |||, e assim por diante. Há 29,5 dias num mês lunar, então poderia ser um calendário lunar primitivo – ou o registro de um ciclo menstrual feminino. Ou ainda uma coleção aleatória de marcas entalhadas. Um rabisco em osso.

O osso do lobo, outro bastão de contagem com 55 marcas, foi encontrado na Checoslováquia em 1937, por Karl Absolon. Tem cerca de 30 mil anos de idade.

Em 1960 o geólogo belga Jean de Heinzelin de Braucourt descobriu uma fíbula de babuíno entalhada entre os restos de uma pequena comu-

nidade pesqueira que ficara soterrada pela erupção de um vulcão. A localização exata é onde atualmente fica Ishango, na fronteira entre Uganda e Congo. O osso é de cerca de 20 mil anos atrás.

A interpretação mais simples do osso de Ishango é, mais uma vez, de que se trata de um bastão de contagem. Alguns antropólogos vão mais longe e detectam elementos de estrutura aritmética, tal como multiplicação, divisão e números primos; alguns pensam que é um calendário lunar de seis meses; outros estão convencidos de que as marcas tinham sido feitas para que se pudesse agarrar bem o osso como cabo de uma ferramenta, sem significado matemático algum.



FIG 1 Frente e verso do osso de Ishango no Museu de Ciências Naturais, Bruxelas.

Com toda a certeza ele é intrigante. Há três séries de entalhes. A série central usa os números 3, 6, 4, 8, 10, 5, 7. Duas vezes 3 são 6, duas vezes 4 são 8 e duas vezes 5 são 10; no entanto, a ordem deste último par está invertida, e 7 não se encaixa em nenhum padrão. A série da esquerda é 11, 13, 17, 19: os números primos de 10 a 20. A série da direita fornece os números ímpares 11, 21, 19, 9. Cada uma das séries da esquerda e da direita soma 60.

Um dos problemas com a interpretação de padrões como este é que é difícil não encontrar um padrão em *qualquer* série de números pequenos. Por exemplo, a Tabela 1 apresenta uma lista das áreas de dez ilhas das Bahamas, nomeados números 11-20 em termos de área total. Para embaralhar a lista botei as ilhas em ordem alfabética. E eu juro: essa foi a primeira

coisa que tentei. Admito que teria substituído por alguma outra coisa se não tivesse conseguido mostrar o meu ponto – mas consegui, então não fiz a substituição.*

O que notamos nesse “padrão” de números? Há uma porção de sequências breves com características comuns:

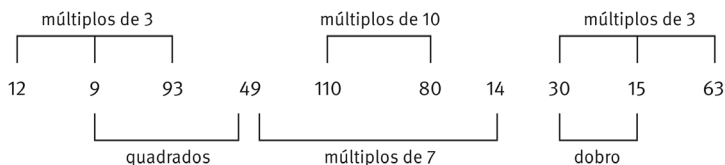


FIG 2 Alguns padrões aparentes nas áreas das ilhas das Bahamas.

| nome | área em milhas quadradas |
|----------------|--------------------------|
| Berry | 12 |
| Bimini | 9 |
| Crooked Island | 93 |
| Little Inagua | 49 |
| Mayaguana | 110 |
| New Providence | 80 |
| Ragged Island | 14 |
| Rum Cay | 30 |
| Samana Cay | 15 |
| San Salvador | 63 |

TABELA 1

Para começar, há uma bela simetria na lista inteira. Em cada ponta um trio de múltiplos de 3. No meio, um par de múltiplos de 10 separando

* Embora alguns nomes de ilhas tenham correspondência em português, não foram traduzidos para que fosse mantida a ordem alfabética optada pelo autor; pelo mesmo motivo as áreas foram mantidas em milhas quadradas, sem conversão para quilômetros quadrados, para que o padrão pudesse ser constatado. (N.T.)

dois múltiplos de 7. Além disso, dois quadrados, $9 = 3^2$ e $49 = 7^2$ – ambos quadrados de números *primos*. Outro par adjacente consiste em 15 e 30, um o dobro do outro. Na sequência 9-93-49 todos os números têm o algarismo 9. Os números tornam-se alternadamente maiores e menores, com exceção de 110-80-14. Ah, e você notou que *nenhum* desses dez números é primo?

Já dissemos o suficiente. Outro problema com o osso de Ishango é a virtual impossibilidade de descobrir evidência adicional para sustentar qualquer interpretação específica. Mas as marcas no osso certamente são intrigantes. Quebra-cabeças de números sempre são. Então passemos para algo menos controverso.

Dez mil anos atrás os povos do Oriente Próximo usavam minúsculos objetos de argila – *tokens* – para registrar números, talvez com propósitos de fixar impostos ou como prova de propriedade. Os exemplos mais antigos são de Tepe Asiab e Ganj-i-Dareh Tepe, dois sítios na cordilheira de Zagros, no Irã. Os *tokens* eram pequenos punhados de argila de diversos formatos, alguns contendo marcas simbólicas. Uma bola com a marca + representava uma ovelha; sete bolas registravam sete ovelhas. Para evitar fazer grandes quantidades de *tokens*, um tipo diferente de *token* representava dez ovelhas. Outro ainda representava dez cabras, e assim por diante. A arqueóloga Denise Schmandt-Besserat deduziu que os *tokens* representavam elementos básicos da época: grãos, animais, jarras de óleo.

Por volta de 4000 a.C., os *tokens* eram amarrados num barbante, como se fosse um colar. No entanto, era fácil mudar os números acrescentando ou removendo *tokens*, então foi introduzida uma medida de segurança. Os *tokens* eram embrulhados em argila, que era então queimada. Uma disputa acerca dos números podia ser resolvida quebrando o invólucro de argila. A partir de 3500 a.C., para evitar a quebra desnecessária, os burocratas da antiga Mesopotâmia passaram a inscrever símbolos no invólucro, listando os *tokens* no seu interior.

Então, com um grande lampejo, percebeu-se que os símbolos tornavam os *tokens* redundantes. O desfecho foi um sistema de símbolos nu-



FIG 3 Invólucro de argila e *tokens* de contabilidade, período de Uruk, de Susa.

méricos escritos, pavimentando o caminho para todos os sistemas subsequentes de notação numérica, e possivelmente da própria escrita.

Este não é basicamente um livro de história, então vamos dar uma olhada em sistemas de notação posteriores à medida que forem surgindo relacionados a números específicos. Por exemplo, antigas e modernas notações decimais são abordadas no Capítulo 10. No entanto, como observou o grande matemático Carl Friedrich Gauss, o importante não são notações, mas noções. Tópicos subsequentes farão mais sentido se forem vistos dentro do contexto da mutável concepção de números da humanidade. Então, começaremos com uma rápida viagem pelos principais sistemas numéricos e alguma terminologia importante.

O sempre crescente sistema numérico

Temos a tendência de pensar nos números como algo fixo e imutável: uma característica do mundo material. Na realidade, eles são invenções humanas – mas invenções muito úteis, porque representam aspectos importantes da natureza. Tais como quantas ovelhas você possui ou a idade do Universo. A natureza repetidamente nos surpreende formulando novas perguntas, cujas respostas às vezes requerem novos conceitos matemáticos. Às vezes as exigências internas da matemática dão pistas para novas estruturas potencialmente úteis. De tempo em tempo essas pistas e problemas levaram os matemáticos a estender os sistemas numéricos inventando novos tipos de número.

Vimos que os números primeiro surgiram como um método de contar coisas. Nos primórdios da Grécia antiga, a lista de números começava com 2, 3, 4, e assim por diante: 1 era especial, não um número “realmente”. Mais tarde, quando essa convenção começou a parecer de fato tola, 1 foi condenado a ser também um número.

O grande passo seguinte na ampliação do sistema numérico foi introduzir frações. Elas são úteis se você quer dividir alguma quantidade entre diversas pessoas. Se três pessoas recebem partes iguais de dois alqueires de grãos, cada um recebe $\frac{2}{3}$ de um alqueire.



FIG 4 Esquerda: Hieróglifos egípcios para $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Centro: Olho de Hórus. Direita: Hieróglifos de frações derivadas dele.

Os antigos egípcios representavam frações de três maneiras diferentes. Tinham hieróglifos especiais para $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Usavam várias porções de um

olho de Hórus, ou olho de wadjet, para representar 1 dividido pelas seis primeiras potências de 2. Finalmente, divisaram símbolos para frações unitárias, aquelas do tipo “1 sobre alguma coisa”: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, e assim por diante. Eles exprimiam todas as outras frações como somas de distintas frações unitárias. Por exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

Não é claro por que não escreviam $\frac{2}{3}$ como $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, mas o fato é que não o faziam.

O número zero veio muito depois, provavelmente porque havia pouca necessidade dele. Se você não tem rebanhos, não há necessidade de contar ou listar as ovelhas. O zero foi introduzido primeiramente como um símbolo, e não era considerado um número como tal. Mas quando [ver -1] matemáticos chineses e hindus introduziram números negativos, o 0 precisou ser considerado também um número. Por exemplo, $1 + (-1) = 0$, e a soma de dois números seguramente precisava ser contada como número.

Os matemáticos chamam o sistema de números

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

de *números naturais*, e quando os números negativos são incluídos temos os *inteiros*

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Acrescentando as frações, o zero e as frações negativas formamos os *números racionais*.

Um número é *positivo* se for maior que zero e *negativo* se for menor que zero. Assim, todo número (seja inteiro ou racional) cai em exatamente uma de três categorias distintas: positivo, negativo ou zero. Os números que servem para contar

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

são inteiros positivos. Esta convenção leva a outra peça de terminologia bastante esquisita: os números naturais

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

são frequentemente citados como inteiros *não negativos*. Peço desculpas por isso.

Por um longo tempo, as frações foram o máximo até onde chegava o conceito de número. Mas os gregos antigos provaram que o quadrado de uma fração nunca pode ser exatamente igual a 2. Posteriormente, isso foi expresso como “o número $\sqrt{2}$ é irracional”, ou seja, não racional. Os gregos tinham um modo mais desajeitado de dizer isso, mas sabiam que $\sqrt{2}$ tinha de existir: pelo teorema de Pitágoras, é o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1. Logo, são necessários mais números: só os racionais não dão conta. Os gregos descobriram um método geométrico complicado para lidar com números irracionais, mas não era totalmente satisfatório.

O passo seguinte rumo ao conceito moderno de número foi possibilitado pela invenção da vírgula decimal (,) e da notação decimal. Isto possibilitou representar números irracionais com uma precisão bastante elevada. Por exemplo,

$$\sqrt{2} \sim 1,4142135623$$

está correto até dez casas decimais (aqui e ao longo do livro o sinal \sim significa “aproximadamente igual a”). Esta expressão não é exata: seu quadrado é na verdade

$$1,99999999979325598129$$

Uma aproximação melhor, correta até vinte casas decimais, é

$$\sqrt{2} \sim 1,41421356237309504880$$

porém mais uma vez não é exata. No entanto, há um sentido lógico rigoroso no qual uma expansão decimal infinitamente longa é exata. É claro que tais expressões não podem ser escritas em sua totalidade, mas é possível configurar as ideias de modo que elas façam sentido.

Decimais infinitamente longos (inclusive os que param, que podem ser pensados como decimais terminando em infinitos zeros) são chamados de *números reais*, em parte porque correspondem diretamente a medidas do mundo natural, tais como comprimentos ou pesos. Quanto mais acurada a medida, mais casas decimais você necessita; para obter um valor exato, precisará de infinitas casas. Talvez seja irônico que “real” seja definido por um símbolo infinito que não pode ser escrito em sua totalidade. Números reais negativos também são permitidos.

Até o século XVIII não houve outros conceitos matemáticos que fossem considerados números genuínos. Mas mesmo no século XV, alguns matemáticos se perguntavam se poderia haver um novo tipo de número: a raiz quadrada de menos um. Ou seja, um número que dá -1 quando você o multiplica por ele mesmo. À primeira vista é uma ideia maluca, porque o quadrado de qualquer número real é positivo ou zero. Contudo, acabou se revelando uma boa ideia forçar o caminho independentemente disso e equipar -1 com uma raiz quadrada, para a qual Leonhard Euler introduziu o símbolo i . É a letra inicial de “imaginário” (em latim, inglês, francês, alemão e português) e recebeu esse nome para distinguir esse novo tipo de número dos bons e velhos números reais. Infelizmente isso levou a um monte de misticismo desnecessário – Gottfried Leibniz certa vez referiu-se a i como “um anfíbio entre ser e não ser” –, o que obscureceu o fato principal. Ou seja: tanto números reais como imaginários têm exatamente o mesmo status lógico. São conceitos humanos que modelam a realidade, mas não são reais em si mesmos.

A existência de i torna necessário introduzir uma porção de outros números novos para se fazer a aritmética – números como $2 + 3i$. Estes são chamados de *números complexos* e têm sido indispensáveis em matemática e na ciência nos últimos séculos. Este fato curioso, mas verdadeiro, é novidade para a maioria da raça humana, porque não é frequente travar contato com os números complexos em matemática escolar. Não por falta de importância, mas porque as ideias são sofisticadas demais e as aplicações demasiado avançadas.